

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

С.В.Кияшко, А.С.Пиковский, М.И.Рабинович

"АВТОГЕНЕРАТОР РАДИОДИАПАЗОНА
СО СТОХАСТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ"

П р е п р и н т № 1

Горький - 1979

УДК 62,501 + 517,925

Рассматривается радиотехнический автогенератор, отличающийся от обычного генератора синусоидальных колебаний с контуром в цепи сетки введенным дополнительно последовательно индуктивности контура туннельным диодом. Проводится качественный и численный анализ описывающих схему динамических уравнений. Структура притягивающей области в фазовом пространстве (аттрактора) исследуется сведением к одномерному точечному отображению, растягивающий характер которого обеспечивает стохастичность генерируемых колебаний. Представлены экспериментально наблюдавшиеся реализации и спектры шумового сигнала.

We consider a radio-frequency auto-generator which differs from the usual sinusoidal generator with vibrational counter in grid circuit only by tunnel diode intruded in succession to inductance. Dynamical equations describing the device are studied both qualitatively and numerically. A structure of attractor in phase space is investigated by reduction to one-dimensional mapping. Expanding nature of this mapping ensures the chaotic state of output. Experimentally observed irregular oscillations and their spectra are presented.

ВВЕДЕНИЕ

В самое последнее время в радиотехнике появились новые привлекательные и с теоретической и с практической точки зрения объекты исследования – собственно автогенераторы шума [1,2], в которых статистика выходного сигнала определяется не усилением флуктуаций, а собственной сложной динамикой системы, не содержащей шумовых источников. Такой автогенератор, собранный даже по очень простой схеме [2, 4], выделяет на нагрузке, в отличие от генераторов периодических колебаний (синусоидальных или релаксационных [3]), сигнал, обладающий всеми признаками случайного (сплошной спектр, спадание автокорреляций и т.д.). Появление простых генераторов шума – стохастических автогенераторов связано с недавними успехами теории нелинейных колебаний систем с числом степеней свободы более двух.

Дело в том, что еще некоторое время назад был известен лишь один математический образ автоколебаний – предельный цикл, как раз и отвечающий генерации периодических сигналов. Всякие более сложные образования в фазовом пространстве автоколебательных систем казались неустойчивыми и, следовательно, физически нереализуемыми. Однако в конце шестидесятых годов математики обнаружили, что помимо простых устойчивых образований (аттракторов) могут существовать и сложные, которым отвечает стохастическое поведение динамической системы – генерация случайного сигнала [5,6]. Так появился математический образ стохастических автоколебаний – “странный аттрактор” [7]⁺). Слова “стохастическое поведение динамической системы” следует понимать в том смысле, что хотя точное задание начальной точки в фазовом пространстве полностью определяет последующую траекторию, эта траектория может быть очень сложной и практически неотличимой от случайного процесса [8–10]. Для наглядности можно сослаться на аналогию с используемыми в ЭВМ генераторами случайных чисел: хотя выполняемые ЭВМ операции детерминированы, выдаваемая последовательность чисел не отличается от случайной.

После открытия странных или стохастических аттракторов практически сразу были предприняты попытки описать с их помощью возникновение гидродинамической турбулентности [7, 11]. Сейчас в этом направлении имеются заметные успехи, свя-

⁺) Мы будем использовать еще и термин “стохастический аттрактор”, предложенный Я.Г.Синаевым [8].

занные, в основном, с исследованием так называемой системы Лоренца [12] – максимально простой модели свободноконвективной турбулентности. Подробные численные расчеты и качественные рассуждения, опирающиеся на теорию бифуркаций, позволили с достаточной уверенностью заключить, что в системе Лоренца в широком интервале изменения параметров других аттракторов, кроме стохастического, нет [13, 14]. Сейчас известно еще несколько достаточно простых систем, при численном исследовании которых обнаружена стохастичность. Эти системы описывают кинетику химических реакций [15], работу динамо [16], нелинейное взаимодействие волн [10, 17].

Исторически так сложилось, что при развитии представлений о странных аттракторах и стохастических автоколебаниях оказалось обойденной классическая область приложения теории динамических систем – радиотехника. Впервые идея о построении радиотехнических генераторов шума, базирующихся на стохастическом аттракторе, была высказана лишь три года назад [15], хотя большая часть из известных систем со стохастическими аттракторами (например, система Лоренца) оказались достаточно просты, чтобы их можно было промоделировать на аналоговой вычислительной машине и получить таким образом реальный генератор шума. Отметим также эксперименты, в которых шум наблюдался в распределенных системах радиодиапазона – LC-линиях [19]. Возможно, наблюдавшийся шум обязан своим происхождением стохастическому аттрактору.

В этой работе приведены результаты теоретического, численного и экспериментального исследования одного из простейших автогенераторов шума – релаксационного генератора, аналогичного [4].

РАБОТА СХЕМЫ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Рассмотрим генератор, собранный по схеме рис.1, а. От классического автогенератора синусоидальных колебаний с контуром в цепи сетки он отличается лишь туннельным диодом, включенным последовательно с индуктивностью. Работа схемы описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} C \dot{U} &= -I, \\ LC \dot{I} &= (MS - 1)I + C(U - V), \\ C_1 \dot{V} &= I - I_{Tq}(V). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь C_1 – емкость туннельного диода, а S – крутизна лампы. При рассмотрении работы схемы характеристику лампы будем считать линейной. Это оправдано тем, что в интересующем нас режиме колебания ограничиваются нелинейной характеристи-

кой туннельного диода $I_{тг}(V)$ (рис. 1, б) на таком уровне, когда нелинейность лампы не сказывается.

Качественно работу генератора можно описать следующим образом. Пока ток I и напряжение U малы, туннельный диод не оказывает существенного влияния на колебания в контуре и те нарастают за счет вносимой лампой энергии. При этом через туннельный диод течет ток I , а напряжение на нем определяется ветвью α характеристики $I_{тг}(V)$. Когда же ток I достигает значения I_m , происходит почти мгновенное переключение туннельного диода (быстрота переключения связана с малостью емкости C_1) — скачком устанавливается напряжение V_m . Затем ток через туннельный диод уменьшается и происходит его обратное переключение — с участка β на α . В результате двух переключений туннельный диод почти полностью "съедает" поступившую в контур энергию и колебания начинают снова нарастать.

Таким образом, генерируемый сигнал $U(t)$ представляет собой последовательность цугов нарастающих колебаний, конец каждого цуга сопровождается импульсом напряжения $V(t)$. Из приведенного описания, конечно, не ясно, будет ли установившийся режим периодическим или стохастическим. Разобраться в этом можно, углубившись в математическое исследование уравнений (1), что мы, однако, отложим до следующего раздела, а сейчас приведем результаты эксперимента.

Схема рис. 1 была реализована на половине триода 6Н111 ($E_a = 250$ В, $r_k = 30$ Ом). Контур состоял из емкости $C = 1,5$ мкФ и индуктивности $L = 5,7$ мГн. В этот контур были включены четыре параллельно соединенных туннельных диода ЗИ306Г ($I_m \approx 7,25$ мА, $V_m \approx 1,08$ В, $C_j \approx 30$ пФ). Инкремент нарастания колебаний в контуре удобно было изменять, меняя сопротивление r . Минимально достижимые потери в контуре, определяемые самими элементами схемы, равнялись $r_0 \approx 8,2$ Ом.

При $R = r - r_0 \approx 14,5$ Ом в контуре возбуждались чисто периодические колебания, которые ограничивались нелинейностью лампы на столь низком уровне, что диоды не переключались ($I < I_m$). При $R \approx 13,5$ Ом амплитуда колебаний достигала порогового значения и сигнал $U(t)$ представлял собой длинные пакки колебаний, изредка прерываемые переключениями диодов. И только при $R < 11$ Ом нелинейность триода не сказывалась — генерировался сигнал в виде цугов, внутри каждого из них колебания экспоненциально нарастают, а переход от одного цуга к другому сопровождался импульсом напряжения на туннельном диоде $V(t)$. Ни при одном значении $R < 11$ Ом не удалось обнаружить периодический режим — генерировался случайный сигнал со сплошным спектром. Из представленных на рис. 2 спектров и осциллограмм видно, как с уменьшением R растет инкремент колебаний h и уменьшается средняя длительность цуга — при этом в спектре сглаживаются пики

на частотах повторения цугов. Большая часть энергии содержится в главном максимуме, соответствующем частоте колебаний контура.

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

При исследовании уравнений (1) перейдем к безразмерным переменным $x = I/I_m$, $z = V/V_m$, $y = UC^{1/2}/(I_m L^{1/2})$, $\tau = t(LC)^{1/2}$, в результате получим

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2hx + y - gz, \\ \dot{y} &= -x, \\ \epsilon \dot{z} &= x - f(z).\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь $h = 0,5(MS - LC)(LC)^{1/2}$ — инкремент нарастания колебаний в контуре в отсутствие диода; $g = V_m C^{1/2}/(I_m L^{1/2})$ — параметр, определяющий степень влияния туннельного диода на процессы в контуре; $\epsilon = g \cdot C_1/C$ — малый параметр, пропорциональный емкости туннельного диода; $f(z) = I_{tg}(V_m z)/I_m$ — нормированная характеристика диода (см. рис. 1, б).

Система (2) имеет малый параметр ϵ при производной, поэтому все движения в фазовом пространстве можно разделить на быстрые — переключения диода (прямые $x = \text{const}$, $y = \text{const}$) и медленные — колебания, при которых напряжение на диоде следит за током (соответствующие траектории лежат на поверхностях A и B ($x = f(z)$, $f'(z) > 0$), соответствующих участкам α и β характеристики диода).

Примерный вид фазового пространства системы (2) представлен на рис. 3. Система имеет одно неустойчивое (при $2h > g/f'(0)$) состояние равновесия $x = y = z = 0$. Траектории, лежащие на поверхности A , раскручиваются вокруг неустойчивого фокуса и в конце концов достигают края поверхности A . Здесь происходит срыв изображающей точки по линии быстрых движений на поверхность B . Пройдя по B , изображающая точка срывается обратно на поверхность A и попадает в окрестность состояния равновесия — начинается новый цуг нарастающих колебаний.

Дальнейший анализ существенно упростится, если мы от непрерывного во времени описания траектории перейдем к дискретному. А именно, будем отмечать только те точки траектории, в которых y (т.е. выходное напряжение U) достигает максимума — построим отображение последования $T: y_i \rightarrow y_{i+1} = \varphi(y_i)$ полупрямой \sum ($x = y = 0$, $y > 0$) в себя. Все начинающиеся и заканчивающиеся на \sum траектории можно разделить на два класса: 1) целиком лежащие на поверхности A — они делают оборот вокруг состояния равновесия и 2) заходящие на поверхность B . Разделены эти две группы траекторией P , которая подходит к линии срыва по касан-

гельной.

Аналитически выразить отображение $\varphi(y)$ удастся только, если $f(z)$ аппроксимирована кусочно-линейной функцией. Положим, например, $f(z) = z/x$ при $z < x$, $f(z) = (1-x-z)/(1-2x)$ при $x < z < 1-x$ и $f(z) = (z-1+x)$ при $1-x < z$. Тогда уравнения медленных движений станут линейными

$$\dot{x} = -2\nu x + y + k, \quad \dot{y} = -x, \quad (3)$$

где $k = 0$ на A (теперь уже A - плоскость) и $k = b = g/(1-x)$ на плоскости B , $\nu = h - 0,5xg$. Стандартным образом сшивая решения (3) на плоскостях A и B [3], нетрудно получить выражение для $\varphi(y)$, аналогично тому, как это было проделано в [4, 18]. Не выписывая громоздких формул, приведем только разбиение области параметров b, ν на различные типы поведения $\varphi(y)$ (рис. 4, а).

Отображения рис. 4, б имеют, наряду с разрывом p (соответствующим траектории P), точку излома q . Появление особенности в точке q связано с тем, что при данном выборе $f(z)$ ($f(z) = 0$ при $z = 1-x$) состояние равновесия лежит точно под линией срыва. Если учесть, что $f(z) \neq 0$ при $z \neq 0$, то излом исчезнет, как показано на рис. 4, б пунктиром. У всех отображений рис. 4, б есть притягивающая область, куда выходят все траектории. Внутри этой области сначала происходит несколько итераций с $y_i < p$ (этому соответствует нарастание колебаний в пуге), а затем итерация с $y_i > p$ возвращает изображающую точку обратно на линейный участок (один пуг сменяется другим).

При малых y внутри притягивающей области выполняется условие $|\varphi'| > 1$, т.е. отображение является растягивающим - при последовательных итерациях две близкие точки расходятся. Расходимость близких траекторий является одним из признаков стохастичности [8, 10] и сразу обеспечивает отсутствие устойчивых предельных циклов. В данном случае отображение имеет инвариантную эргодическую меру, относительно которой оно является перемешивающим (это следует из результатов работы [14]).

Однако выводы, полученные при использовании кусочно-линейной аппроксимации $f(z)$ могут оказаться неверными, поскольку при таком описании неправильно отражается поведение траекторий, близких к P . Поэтому отображение T было построено нами численно. Значения параметров были выбраны следующими: $h = 0,074$; $q = 2,8$; $\epsilon = 0,004$, характеристика $f(z)$ аппроксимировалась функцией $f(z) = z \exp(3,61 - 13,5z) + \exp[6,5(z-1)]$. Интегрирование проводилось на ЭВМ БЭСМ-6 методом Рунге-Кутты с шагом $2 \cdot 10^{-4}$, получившаяся функция $\varphi(y)$ представлена на рис. 5. Вблизи P теперь появилась критическая точка, в которой $\varphi' = 0$, однако разрешить область разрыва полностью не удалось. По-видимому, отображение T в действительности непрерывно, но $\varphi' \sim \exp(\epsilon^{-1})$, т.е. предположение о том, что кусочно-линейная аппроксимация достаточно хорошо описывает истинную ситуацию, под-

твердилось. И все же существование внутри притягивающей области критических точек ухудшает стохастичность системы.

Как следует из [21, 22], отображения с критическими точками при почти всех значениях параметров имеют устойчивый предельный цикл. Однако, во-первых, устойчивый цикл окружен стохастической непритягивающей областью [23], во-вторых, период цикла может быть очень велик и на больших интервалах времени реализация выглядит случайной, в третьих, область пространства параметров, в которой данный цикл устойчив, как правило, очень мала. Поэтому в численных экспериментах [24] отображения с критическими точками демонстрируют стохастическое поведение, впрочем, здесь возможно более подходящим был бы термин "сложная динамика" [18]. И хотя наблюдаемая при этом стохастичность является следствием малых шумов (например, ошибок округления), статические свойства сигнала определяются, судя по всему, не статистикой шумов, а собственной динамикой системы.

Таким образом, система (2) демонстрирует поведение, практически неотличимое от стохастического, а получающийся в автогенераторе сигнал является случайным.

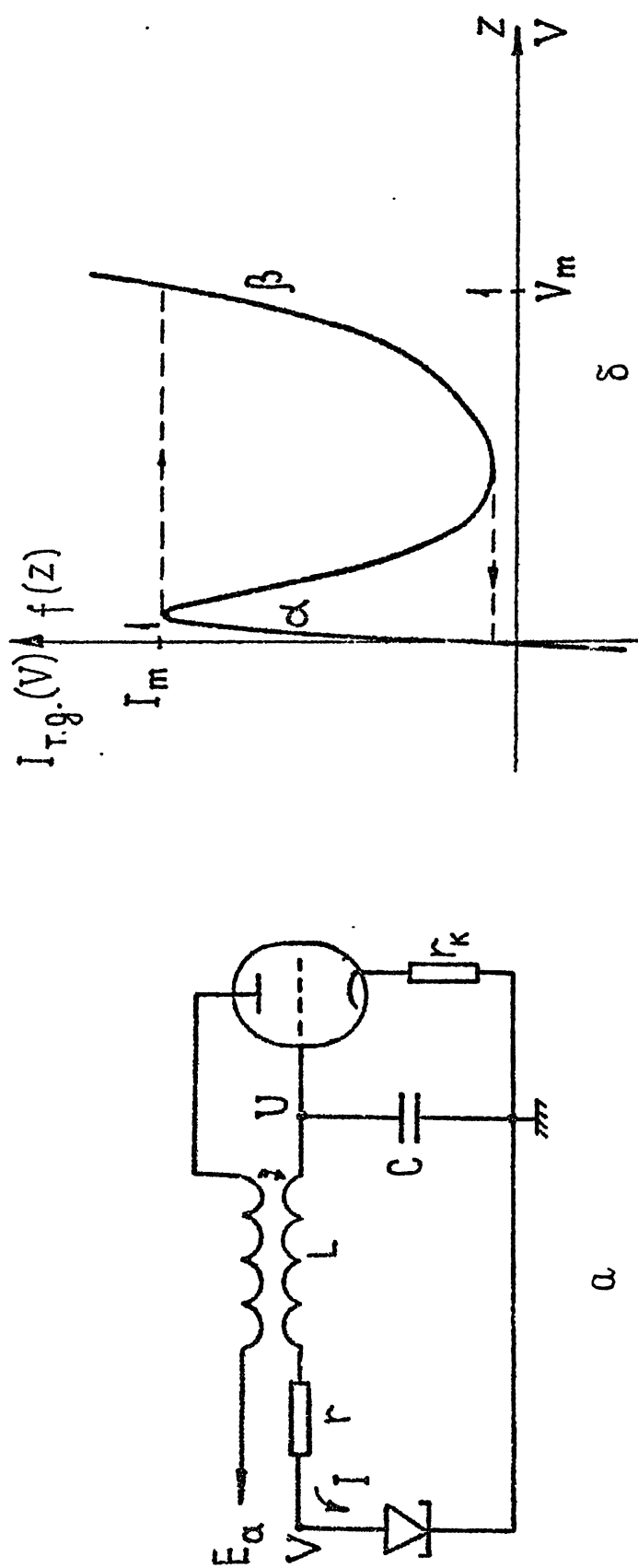
В описанном здесь автогенераторе шума реализован лишь один из возможных механизмов возникновения стохастичности в автоколебательных системах. В радиотехнических устройствах могут быть реализованы и другие механизмы — распадный, связанный с инерционностью нелинейности и другие [10]. В связи с исследованием собственно автогенераторов шума очевидный интерес представляют вопросы о воздействии на них внешнего сигнала, о взаимодействии нескольких таких генераторов и еще многие. Работы в этом направлении еще только начинаются.

Авторы выражают признательность А.В.Гапонову за непрерывный интерес к работе и А.А.Андронову, Ю.Б.Кобзареву и С.М.Рытову за полезные дискуссии.

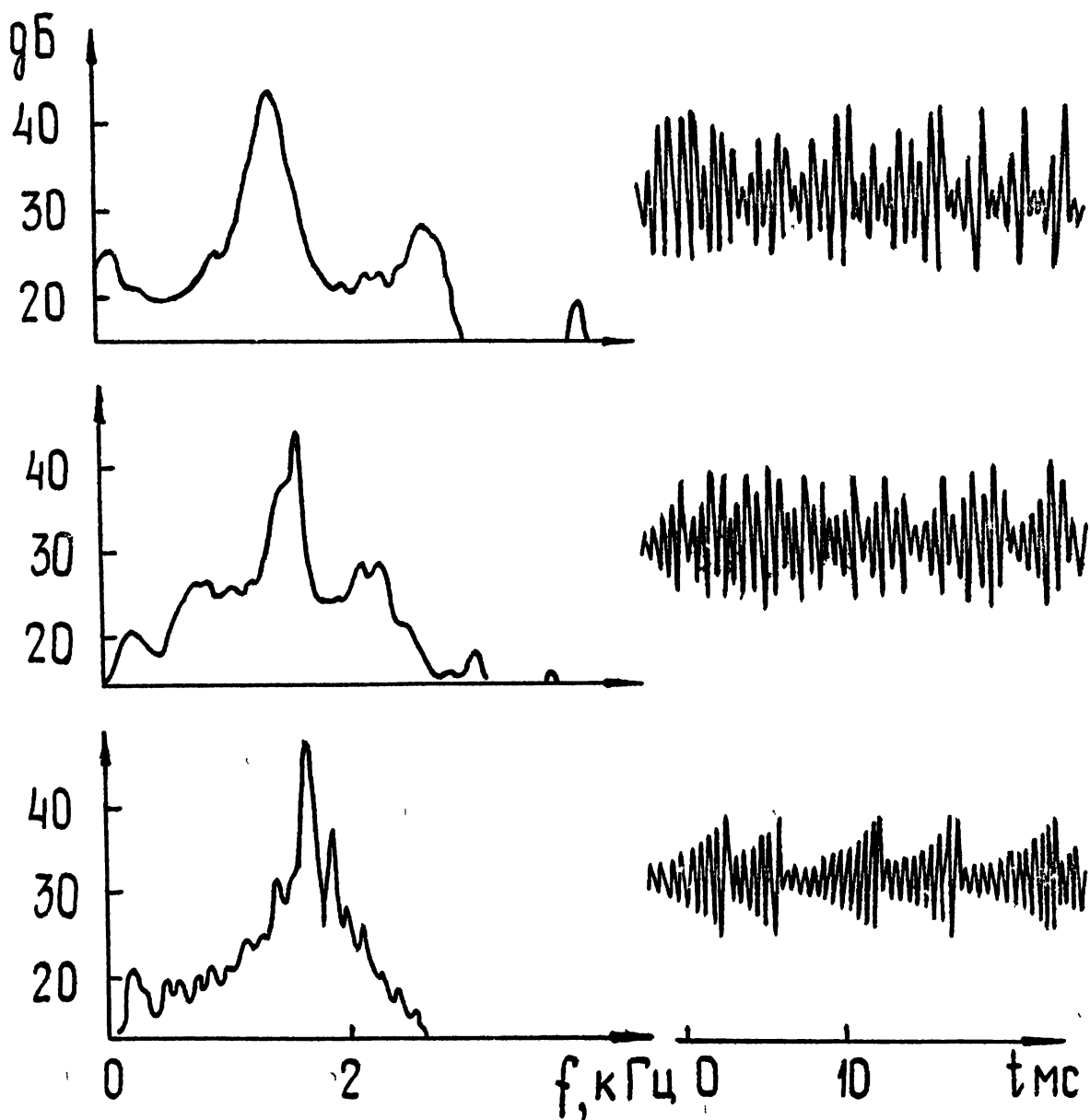
Л и т е р а т у р а

1. J.P.Gollub, T.O.Brunner, B.G.Danley, Science, 1978, 200, 48.
2. Кияшко С.В., Пиковский А.С., Рабинович М.И. Генератор случайных сигналов радиодиапазона, заявка на изобретение № 2593720/18-09 (040531) от 23 марта 1978г., положительное решение от 29 сентября 1978 г.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний, М., Физматгиз, 1959.
4. Пиковский А.С., Рабинович М.И. — ДАН СССР, 1978, 239, с.301.
5. Смейл С. — УМН, 1970, 25, с.113.
6. Williams R. — Topology, 1967, 6, p.473.
7. Ruelle D., Takens F. — Comm. Math.Phys., 1971, 20, p.167.

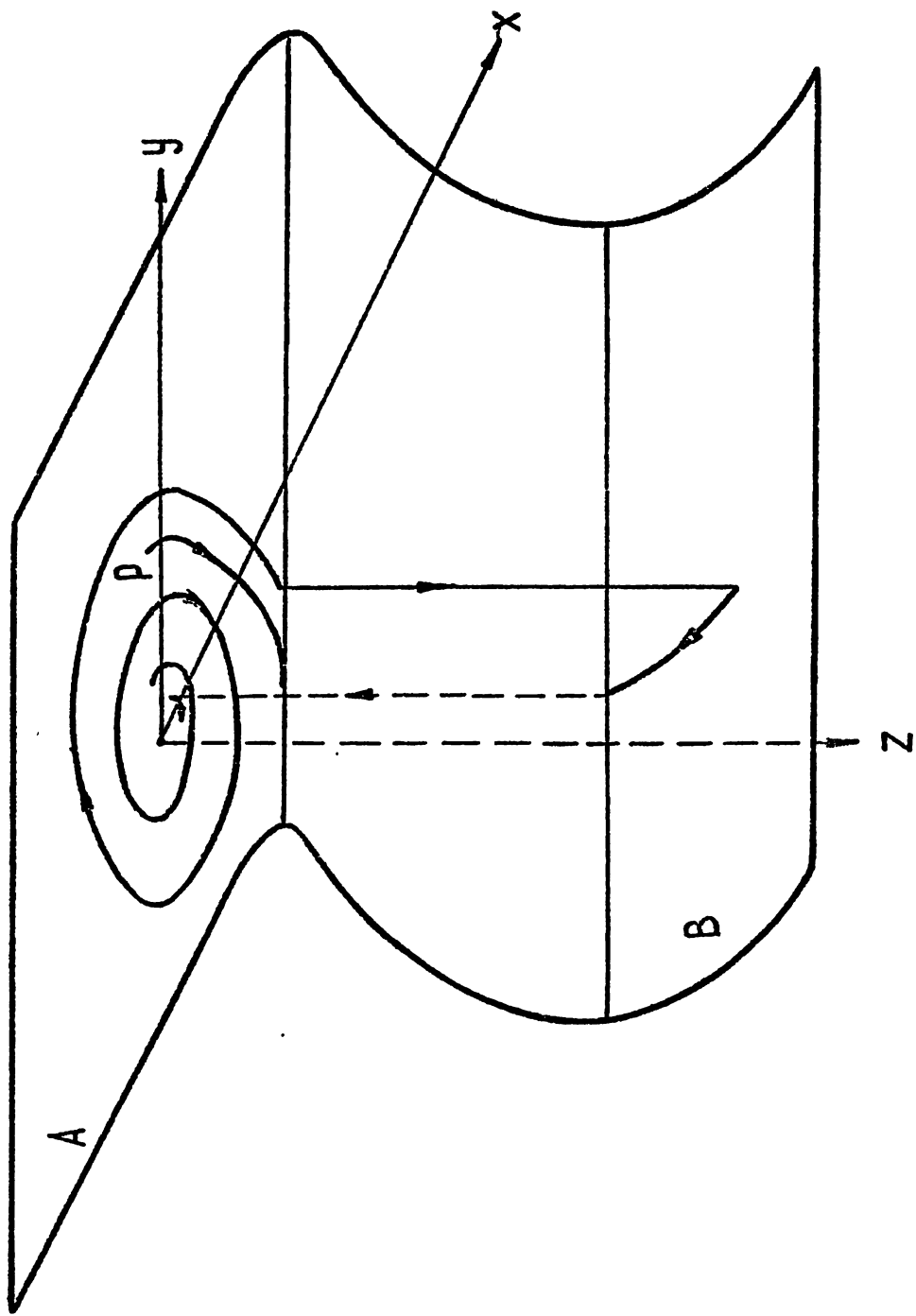
8. Синай Я.Г. - в сб.: Нелинейные волны. М., Наука, 1979.
9. Алексеев В.М. Символическая динамика.-В кн: X1 летняя математическая школа. Киев, Ин-т математики АН УССР, 1976.
10. Рабинович М.И. - УФН, 1978, 125, с.123.
11. Mclaughlin J.B., Martin P.C. - Phys.Rev.A, 1975, 12, p.186.
12. Lorenz E.N. - J.Atmos.Sci., 1963, 20, p.130.
13. Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. - ДАН СССР, 1977, 234, с.336.
14. Бунимович Л.А., Синай Я.Г. - в сб.: Нелинейные волны, М., Наука, 1979.
15. Rossler O.E. - Z.Natyrforsch., 1976, 31a, p.259.
16. Rikitake T. - Proc.Cambr., Phil.Soc., 1958, 54, p.89.
17. Sherman J.S., Mclaughlin J. - Comm.Math.Phys., 1978, 27, p.1.
18. Mira C. - in "Convegno internazionale su equazioni differenziali ordinarie ed equazioni funzionali", ed.R.Conti, G.Sestini, G.Villari, 1978, Firenze, p.25.
19. Кияшко С.В., Рабинович М.И. - ЖЭТФ, 1974, 66, с.1626.
20. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М., Наука, 1975.
21. Якобсон М.В. - ДАН СССР, 1978, 243, с.886.
22. Mira C., - V11 Int.Conf. on Nonl. Oscill., Academic-Verlag, Berlin, 1977, p.81.
23. Li T.Y., Yorke J.A., Amer.Math.Monthly, 1975, 82, p.985.
24. Lorenz E.N., - Tellus, 1964, 16, p.1.



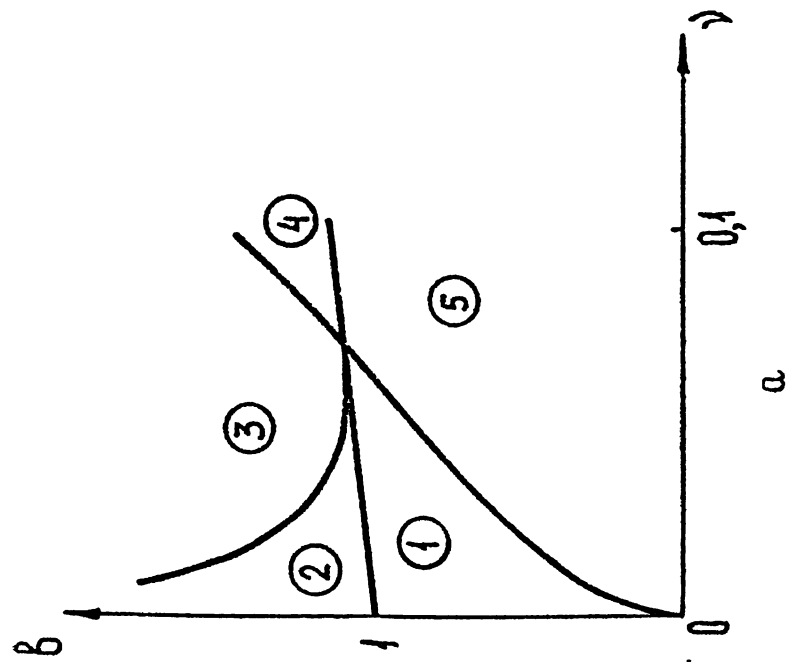
Р и с. 1. а - схема автогенератора шума; б - вольт-амперная харак-
теристика туннельного диода



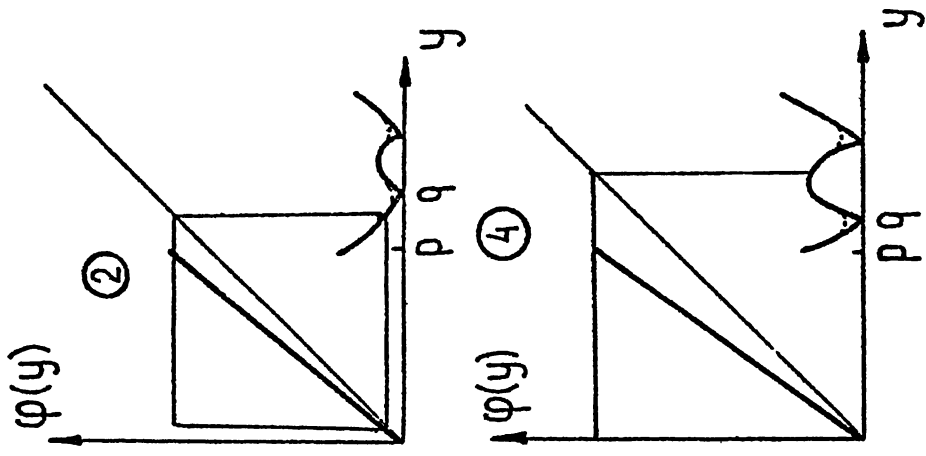
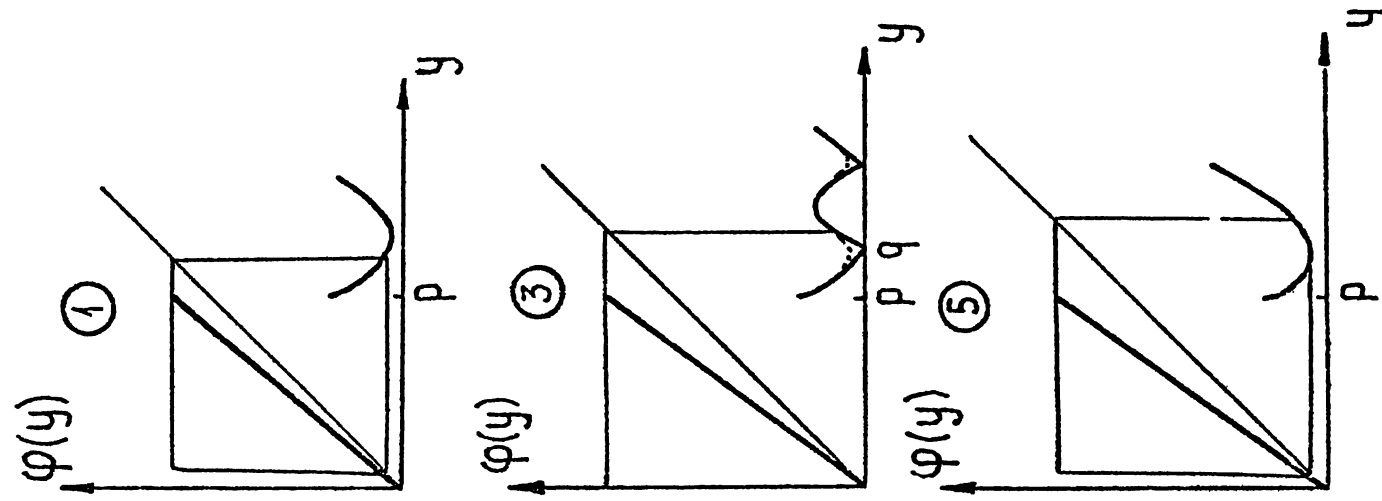
Р и с. 2. Спектры и осциллограммы выходного сигнала автогенератора шума при различных значениях $R < 11 \text{ Ом}$ (верхнему рисунку соответствует наименьшее R)

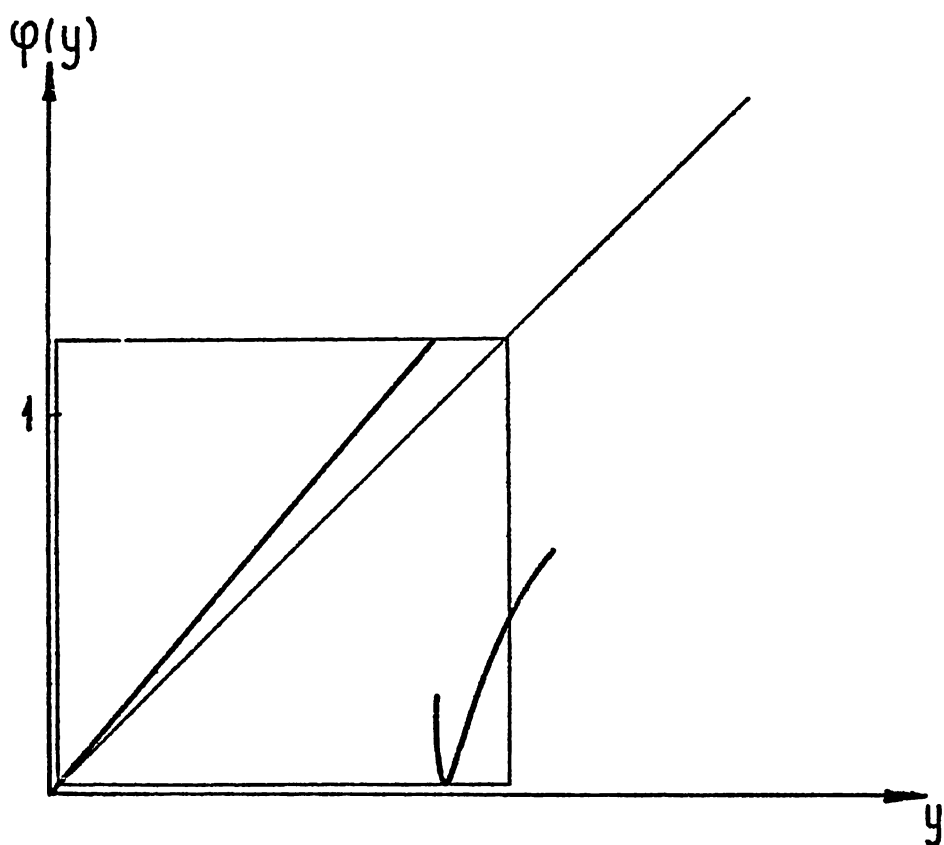


Р и с. 3. Фазовое пространство системы (2)



Р и с. 4. а - разбиение плоскости параметров β, γ на области различного поведения T ; б - отображения T , получающиеся при кусочно-линейной аппроксимации $f_i(z)$





Р и с. 5. Отображение $y \rightarrow \varphi(y)$, построенное для системы (2) численно при $h = 0,074$, $q = 2,8$, $\varepsilon = 0,004$

С.В.Кияшко, А.С.Пиковский, М.И.Рабинович

**"АВТОГЕНЕРАТОР РАДИОДИАПАЗОНА
СО СТОХАСТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ"**

Редактор Н.А.Городецкая

Корректор И.С.Ипатова

МЦ № 00726 от 05.11.79г. Заказ № 10 Тираж 120
Формат 60 x 90/8. Объем 0,56 уч.-изд.л. Бесплатно

Отпечатано на ротапринте в Институте прикладной физики АН СССР
г.Горький, ул.Ульянова, 46